La fonction racine carrée

Cours

DÉFINITION

La fonction racine carrée, notée $x \mapsto \sqrt{x}$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ qui, à tout réel x positif, associe sa racine carrée $\sqrt{x}$.

SENS DE VARIATION

La fonction racine carrée est **CROISSANTE** sur $[0\,;\,+\infty[$

Rappel : Dire qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que pour tous nombres a et b de I, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$.

Démonstration : Soient a et b deux nombres réels positifs (non tous nuls) tels que $a \leq b$ et soit f la fonction racine carrée. Comparons alors $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire étudions le signe de $f(a) - f(b)$.

Pour tous réels a et b positifs non tous nuls, on a :

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Etudions donc le signe de ce produit.

- Par hypothèse, $a \leq b$ donc $a - b \leq 0$
- D'autre part, $\sqrt{a} \geq 0$ et $\sqrt{b} \geq 0$ donc, par somme, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ (car a et b non tous nuls)

Par conséquent, $f(a) - f(b)$ est le rapport d'un facteur négatif par un facteur positif (non nul). On a donc : $f(a) - f(b) \leq 0$, c'est-à-dire $f(a) \leq f(b)$.

En définitive, si $0 \leq a \leq b$ (a et b non tous nuls), alors $f(a) \leq f(b)$ donc la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

TABLEAU DE VARIATION :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$

La fonction racine carrée admet un **MINIMUM** en 0 égal à 0. Autrement dit, pour tout x réel positif, $\sqrt{x} \geq 0$.

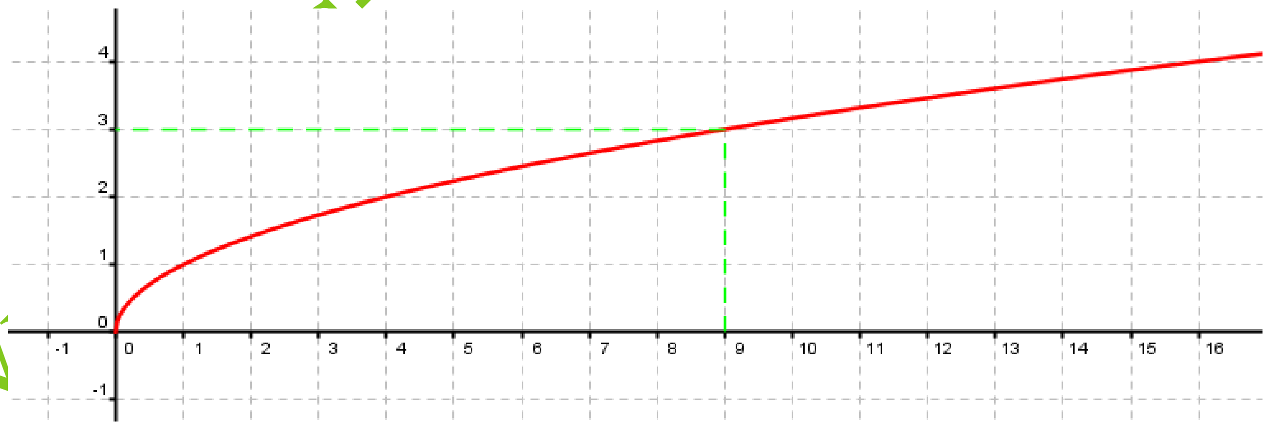
Remarque : On peut retenir que deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leur racine carrée (ou bien que si a et b sont deux nombres positifs tels que $a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$).

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE et SYMÉTRIE

La représentation graphique de la fonction racine carrée est une **PORTION DE PARABOLE**.

Point méthode : Pour tracer la représentation graphique de la fonction racine carrée, on établit un tableau de valeurs, on place dans un repère les points de coordonnées $(x\,;\sqrt{x})$ et on les relie par une courbe régulière et continue.

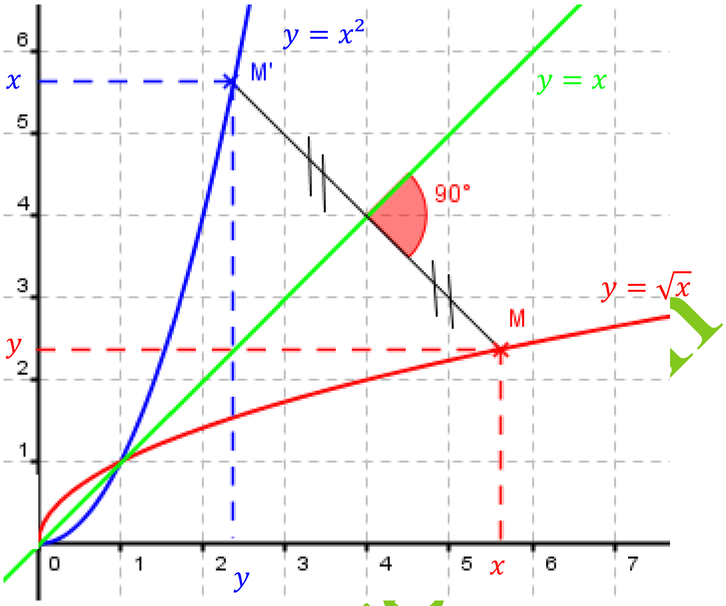
x	0	1	2	4	9	16	25	36	100
$\sqrt{x}$	0	1	$\approx 1{,}414$	2	3	4	5	6	10



Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction racine carrée et la courbe représentative de la fonction carré sur $[0\,;\,+\infty[$ sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration : Soient x et y deux nombres réels positifs.

$y = \sqrt{x}$ équivaut à $x = y^2$. C'est-à-dire $M(x\,;y)$ appartient à la courbe représentative de la fonction racine carrée si et seulement si dire $M'(y\,;x)$ appartient à la courbe représentative de la fonction carré.



Position relative des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x$ $\Leftarrow$

POSITIONS RELATIVES DE COURBES REPRÉSENTATIVES

- Pour tout réel $x \in [0\,;1]$,

$$x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$$

Sur $[0\,;1]$, la courbe représentative de la fonction carré est située en-dessous de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x$, elle-même située en-dessous de la courbe représentative de la fonction racine carrée.

- Pour tout réel $x \in [1\,;+\infty[$,

$$\sqrt{x} \leq x \leq x^2$$

Sur $[1\,;+\infty[$, la courbe représentative de la fonction carré est située au-dessus de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x$, elle-même située au-dessus de la courbe représentative de la fonction racine carrée.

Démonstration : Soit un réel x positif.

- Comparons tout d'abord x et x^2.

Pour tout x positif, $x^2 - x = x(x-1)$

Comme $x \geq 0$, $x^2 - x$ est du signe de $x - 1$.

  - <u>1er cas :</u> Si $x \geq 1$, $x - 1 \geq 0$, c'est-à-dire $x^2 - x \geq 0$. Autrement dit $x^2 \geq x$.
  - <u>2ème cas :</u> Si $x \leq 1$, $x - 1 \leq 0$, c'est-à-dire $x^2 - x \leq 0$. Autrement dit $x^2 \leq x$.

- Comparons désormais x et $\sqrt{x}$.

Pour tout x positif, $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$

Comme $\sqrt{x} \geq 0$, $x - \sqrt{x}$ est du signe de $\sqrt{x} - 1$.

- 1^{er} cas : Si $x \geq 1$, $\sqrt{x} - 1 \geq 0$, c'est-à-dire $x - \sqrt{x} \geq 0$. Autrement dit $x \geq \sqrt{x}$.
- $2^{ème}$ cas : Si $x \leq 1$, $\sqrt{x} - 1 \leq 0$, c'est-à-dire $x - \sqrt{x} \leq 0$. Autrement dit $x \leq \sqrt{x}$.

- En résumé, on a :
  - 1^{er} cas : Si $x \geq 1$, alors $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$
  - $2^{ème}$ cas : Si $x \leq 1$, alors $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$

Remarque : Ces inégalités justifient les positions relatives des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x$ (voir graphique précédent).

RELATIONS ALGÉBRIQUES

- Pour tous réels a et b positifs,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

- Pour tous réels $a \geq 0$ et $b > 0$,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

- Pour tout réel $x \geq 0$,

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

- Pour tout réel x,

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Remarque : La notation $|x|$ désigne la **VALEUR ABSOLUE** de x.