Fonctions polynômes du second degré – Trinômes

Résolutions d'équations et d'inéquations, factorisations et étude de trinômes

Exercice 1 *(1 question)* *Niveau : facile*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $x^2 - 5x - 6 = 0$
- $-2x^2 + 3x - 1 = 0$
- $3x^2 - 3x + 2 = 0$

Correction de l'exercice 1

Rappels :

- L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) est dite **équation du second degré** à une inconnue.
- On appelle **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$ toute valeur de la variable x solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
- Le réel Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

1er cas : $\Delta = 0$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet **une solution double** :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

2e cas : $\Delta > 0$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet **deux solutions réelles distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

3e cas : $\Delta < 0$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet **aucune racine réelle**.

- Résolvons l'équation $x^2 - 5x - 6 = 0$

$x^2 - 5x - 6$ s'écrit aussi

$1x^2 + (-5)x + (-6)$

Posons Δ le discriminant du trinôme $x^2 - 5x - 6$.

Alors $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 + 24 = 49$

$\Delta > 0$ donc le trinôme $x^2 - 5x - 6$ admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{5-7}{2} = -1 \qquad x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{5+7}{2} = 6$$

Les solutions S de l'équation $x^2 - 5x - 6 = 0$ se notent : $S = \{-1\ ;\ 6\}$

- Résolvons l'équation $-2x^2 + 3x - 1 = 0$

Posons Δ le discriminant du trinôme $-2x^2 + 3x - 1$.

Alors $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = 9 - 8 = 1$

$\Delta > 0$ donc le trinôme $-2x^2 + 3x - 1$ admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times (-2)} = \frac{-3-1}{-4} = 1 \qquad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times (-2)} = \frac{-3+1}{-4} = \frac{1}{2}$$

Les solutions S de l'équation $-2x^2 + 3x - 1 = 0$ se notent : $S = \{1/2\ ;\ 1\}$

- Résolvons l'équation $3x^2 - 3x + 2 = 0$

Posons Δ le discriminant du trinôme $3x^2 - 3x + 2$.

Alors $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 9 - 24 = -15$

$\Delta < 0$ donc le trinôme $3x^2 - 3x + 2$ n'admet aucune racine réelle.

Les solutions S de l'équation $3x^2 - 3x + 2 = 0$ se notent : $S = \emptyset$

Exercice 2 *(1 question)* — *Niveau : moyen*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\dfrac{(3x^2 + 2x - 1)(x^2 + x + 1)}{(6 - 2x^2)(x^2 - x - 6)} \geq 0$

Correction de l'exercice 2

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{(3x^2 + 2x - 1)(x^2 + x + 1)}{(6 - 2x^2)(x^2 - x - 6)} \geq 0$

- Commençons par étudier le signe de Δ_1, Δ_2 et Δ_3, discriminants respectifs des trinômes $3x^2 + 2x - 1$, $x^2 + x + 1$ et $x^2 - x - 6$.

Remarque :

Il est inutile de calculer le discriminant du trinôme $6 - 2x^2$ puisque ce trinôme est facilement factorisable, à l'aide de l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$. En effet :

$$6 - 2x^2 = -2(x^2 - 3) = -2\left(x^2 - \sqrt{3}^2\right) = -2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

$\Delta_1 = 2^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16$

$\Delta_2 = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$

$\Delta_3 = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$

- Déterminons désormais les racines de chaque trinôme.

$\Delta_1 > 0$ donc le trinôme $3x^2 + 2x - 1$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 3} = -1 \qquad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$\Delta_2 < 0$ donc le trinôme $x^2 + x + 1$ n'admet aucune racine réelle.

$\Delta_3 > 0$ donc le trinôme $x^2 - x - 6$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_3 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -2 \qquad x_4 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 3$$

Le trinôme $6 - 2x^2$ a pour racines réelles distinctes :

$$x_5 = -\sqrt{3} \qquad x_6 = \sqrt{3}$$

- Dorénavant, factorisons chaque trinôme.

Rappel : Factorisation d'un trinôme

Soit f une fonction polynôme du second degré telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
- Si f admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2, alors, $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ pour tout x réel,.
- Si f n'admet pas de racine réelle, alors f n'est pas factorisable.

$3x^2 + 2x - 1$ admet deux racines réelles distinctes $x_1 = -1$ et $x_2 = 1/3$

De ce fait, $3x^2 + 2x - 1$ est factorisable et $3x^2 + 2x - 1 = 3(x - x_1)(x - x_2) = 3(x + 1)(x - 1/3)$

$x^2 + x + 1$ n'admet aucune racine réelle donc ce trinôme n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

$x^2 - x - 6$ admet deux racines réelles distinctes $x_3 = -2$ et $x_4 = 3$

De ce fait, $x^2 - x - 6$ est factorisable et $1x^2 - x - 6 = 1(x - x_3)(x - x_4) = (x + 2)(x - 3)$

Ainsi :

$$\frac{(3x^2 + 2x - 1)(x^2 + x + 1)}{(6 - 2x^2)(x^2 - x - 6)} = \frac{3(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x^2 + x + 1)}{-2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 2)(x - 3)}$$

$$= -\frac{3}{2} \times \frac{(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x^2+x+1)}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x+2)(x-3)}$$

- Etudions enfin le signe du quotient $Q(x) = -\frac{3}{2} \times \frac{(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x^2+x+1)}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x+2)(x-3)}$

Pour ce faire, étudions le signe de chaque facteur suivant les valeurs de x.

$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

$x - \frac{1}{3} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$

$x - \sqrt{3} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{3}$

$x + \sqrt{3} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\sqrt{3}$

$x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

$x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

Attention lors de l'étude du signe de $Q(x)$!

Effectivement, $Q(x)$ est du signe contraire de

$$\frac{(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x^2+x+1)}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x+2)(x-3)}$$

Déterminons également le signe du trinôme $x^2 + x + 1$.

Rappel : Signe d'un trinôme (n'ayant aucune racine réelle)

Soit f une fonction polynôme du second degré telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
Si f n'admet aucune racine réelle (cas où $\Delta < 0$), alors :

- $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ (forme canonique du trinôme $ax^2 - bx + c$)
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est du signe de a (c'est-à-dire du coefficient du terme de degré 2) En effet, l'expression entre crochets ci-dessus est positive.

Le trinôme $x^2 + x + 1$ est donc positif, pour tout réel x. En effet, le coefficient du terme de degré 2 est 1.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		-1		$\frac{1}{3}$		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-\frac{1}{3}$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$-$		$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$+$	0	$+$	
$Q(x)$		$-$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$	

Les solutions S de l'inéquation $\dfrac{(3x^2+2x-1)(x^2+x+1)}{(6-2x^2)(x^2-x-6)} \geq 0$ sont notées :

$S = \left]-2\,;\,-\sqrt{3}\right[\cup \left[-1\,;\,\frac{1}{3}\right] \cup \left]\sqrt{3}\,;3\right[$

Exercice 3 *(1 question)* — *Niveau : difficile*

Déterminer a ($a \in \mathbb{R}$) pour que l'équation $x^2 - 4x + a = 0$ admette deux solutions réelles distinctes comprises entre 1 et 5.

Correction de l'exercice 3

Soit l'équation du second degré à une inconnue $x^2 - 4x + a = 0$ avec a réel.

- Cette équation admet deux racines réelles distinctes si et seulement si le discriminant Δ du trinôme $x^2 - 4x + a$ est nul.

Or, $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times a = 16 - 4a = 4(4-a)$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4(4-a) > 0 \Leftrightarrow 4 - a > 0 \Leftrightarrow a < 4$

Donc, si $a < 4$, le trinôme $x^2 - 4x + a$ admet deux racines réelles distinctes. Appelons-les x_1 et x_2. On a alors : $x^2 - 4x + a = (x - x_1)(x - x_2)$.

- Si x_1 et x_2 sont comprises entre 1 et 5, alors :

D'une part, $(1 - x_1)(1 - x_2) > 0$ car $1 - x_1 < 0$ et $1 - x_2 < 0$

D'autre part, $(5 - x_1)(5 - x_2) > 0$ car $5 - x_1 > 0$ et $5 - x_2 > 0$

Rappel : Signe d'un trinôme (ayant deux racines réelles distinctes)

Soit f une fonction polynôme du second degré telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
Si f admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 telles que $x_1 < x_2$, alors :

- $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- pour tout $x \in]-\infty\,;\,x_1[\cup]x_2\,;\,+\infty[$, $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ et $f(x)$ est du signe de a
- pour tout $x \in]x_1\,;\,x_2[$, $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ et $f(x)$ est du signe de $-a$

- Ainsi, l'équation $x^2 - 4x + a = 0$ admet deux solutions réelles comprises entre 1 et 5 si et seulement si :

$$\begin{cases} a < 4 \\ (1 - x_1)(1 - x_2) > 0 \\ (5 - x_1)(5 - x_2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 4 \\ 1 - x_2 - x_1 + x_1x_2 > 0 \\ 25 - 5x_2 - 5x_1 + x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 4 \\ 1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2 > 0 \\ 25 - 5(x_1 + x_2) + x_1x_2 > 0 \end{cases}$$

Rappel : Somme et produit de racines

Soit f une fonction polynôme du second degré telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
Si f admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 alors :

Le **produit des racines** est :	La **somme des racines** est :
$x_1x_2 = \frac{c}{a}$	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

Or, $x_1 + x_2 = -\frac{-4}{1} = 4$

Et $x_1x_2 = \frac{a}{1} = a$

Donc :

$$\begin{cases} a < 4 \\ 1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2 > 0 \\ 25 - 5(x_1 + x_2) + x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 4 \\ 1 - 4 + a > 0 \\ 25 - 5 \times 4 + a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 4 \\ -3 + a > 0 \\ 5 + a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 4 \\ a > 3 \\ a > -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 4 \\ a > 3 \end{cases}$$

En conclusion, l'équation $x^2 - 4x + a = 0$ admet deux solutions réelles comprises entre 1 et 5 si et seulement si $a \in]3\,;4[$.